अध्यायः 11

परिमापः एवञ्च क्षेत्रफलम्

11.1 भूमिका

भवन्तः तले निर्मितानाम् आकृतीनां परिमापः एवञ्च वर्गस्य आयताकारस्य च क्षेत्रफलानां विषये षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् अपठन्। परिमापः एकं संवृत्ताकृतिं परितः दूरत्वम् अस्ति यद्यपि क्षेत्रफलम् एकं संवृत्ताकृतिना वेष्टिततलभागम् अथवा क्षेत्रं दर्शयति। अस्यां कक्ष्यायां भवन्तः कासाञ्चन अन्यासाम् अधोभागाकृतीनां परिमापनस्य क्षेत्रफलस्य विषये च अधिगमिष्यन्ति।

11.2 वर्गः आयतः च

आयुषः दीक्षा च उभौ चित्रं लिखतः। आयुषः एकं चित्रं षष्टिः सेण्टीमीटरपरिमित-दीर्घतायुक्ते (60) विंशतिः सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुक्ते (20) च एकस्मिन् आयाताकारकर्गदे निरमात् (निर्मितवान्) यद्यपि दीक्षा एकं चित्रं चत्वारिंशत् सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घतायुक्ते (40) पञ्चत्रिंशत् सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुक्ते (35) च एकस्मिन् आयताकार-कागदे निर्मितवान्। (निर्मितवती)। एतयोः चित्रयोः पृथक् कपाटलवनम् उद्वर्तनम् (laminate) च करणीयम्।

यदि कपाटलवनस्य व्ययः प्रतिसेण्टीमीटर^2 परिमिते त्रीणि रूप्यकाणि (3.00) भवेयुः तु कतमं चित्रं कपाटलवनीकर्तुम् अधिकानि रूप्यकाणि व्ययीभविष्यन्ति ?

यदि उद्वर्तनस्य व्यय-स्तरः 2.00 रू. प्रति सेण्टीमीटर2 परिमितं भवेत् तु कस्य चित्रस्य उद्वर्तने अधिकः व्ययः भविष्यति ?

कपाटलवनस्य निखिलं व्ययं ज्ञातुं वयं तस्य परिमापं ज्ञात्वा कपाटलवन-स्तरेण गुणनस्य आवश्यकता भविष्यति। अनेन प्रकारेण उद्वर्तनस्य निखिलव्ययम् अवज्ञातुं तस्य क्षेत्रफलं ज्ञात्वा तस्य उद्वर्तन-स्तरेण गुणनस्य आवश्यकता भविष्यति।

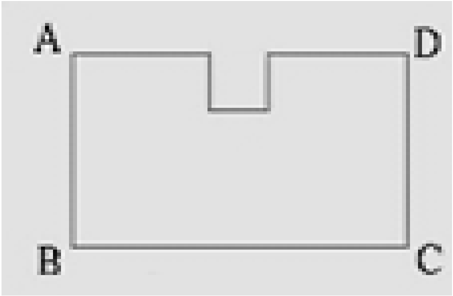
एतान् कुर्वन्तु

अधः प्रदत्तानां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं भवतां कृते क्षेत्रफलपरिमापयोः कस्य ज्ञानम् अनिवार्यं भविष्यति।

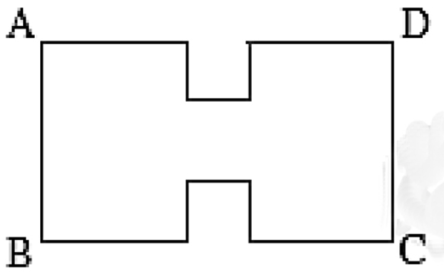
1. एकं श्यामफलकं कियत् स्थानं आवृणोति।
2. एकाम् आयताकारीं पुष्पराधिकां परितः चत्वरं नियोक्तुम् आवश्यकायाः धातुतन्त्र्याः दीर्घता का अस्ति ?
3. एकं त्रिकोणोद्यानं परितः वारद्वयं परिभ्रमणे भवन्तः कियत् दूरं गमिष्यन्ति ?
4. एकम् आयाताकारं तरणालयम् आवृणोतुं भवतां कृते कियतः अभिगट्याच्छादकस्य आवश्यकता भविष्यति ?

किं भवन्तः जानन्ति -

आकृतिः 11.1



आकृतिः 11.2



आकृतिः 11.3

समबहुभुजस्य परिमापः = भुजानां सङ्ख्या $\times$ एकस्याः भुजस्य दीर्घता

वर्गस्य परिमापः = $4 \times$ भुजस्य

आयतस्य परिमापः = $2 \times (l + b)$

आयतस्य क्षेत्रफलम् = $l \times b$

वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजः $\times$ भुजः

तान्या एकां समुचितचित्रकलाम् (collage) पूर्णं कर्तुं चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितस्य (4) भुजयुक्तस्य वर्गस्य आवश्यकता आसीत् । तस्याः समीपे अष्टाविंशतिः सेण्टीमीटरपरिमितदीर्घतायाः एवञ्च (21) एकविंशतिसेण्टीमीटरपरिमितविस्तृतेः आयताकारम् आस्तरणम्(Sheet) आसीत् (आकृतिः 11.1) सा आस्मात् आस्तरणात् 4 सेण्टीमीटर भुजामन्तं वर्गम् अछिनत् । तस्याः मित्रम् आस्तरणस्य शेषभागम् अपश्यत् (आकृतिः11.2) तान्यां च अपृच्छत् 'किम् अधुना आस्तरणस्य परिमापनं वर्धितम् अथवा न्यूनम् अभवत्' ?

किम् AD इति भुजस्य निखला दीर्घता, कर्तनात् पूर्वं वर्धिता ?

किं क्षेत्रफलं वर्धितम् अथवा न्यूनम् अभवत् ?

तान्या सम्मुखस्य भुजस्य एकम् अन्यवर्गं छिनति (आकृतिः 11.3)।

किम् आस्तरणस्य शेषभागस्य परिमापनं पूर्वस्मात् इतोऽपि अधिकं भविष्यति ?

किं क्षेत्रफलं पूर्वस्मात् इतोऽपि वर्धिष्यते अथवा न्यूनीभविष्यति ?

अतः इतः वयं किं निष्कर्षं निष्कासयितुं शक्नुमः ?

अनेन स्पष्टम् अस्ति यत् परिमापवर्धने सति क्षेत्रफलस्य वर्धनम् अपि आवश्यकं नास्ति ।

एतान् कुर्वन्तु

1. एतादृशीषु बह्वीषु आकृतिषु तथा च कर्तिताकृतिषु प्रयोगं कुर्वन्तु ।
   भवन्तः एतासाम् उपयोगः एताः आकृतीः वर्गाङ्कितेषु आस्तरेणेषु निर्माय क्षेत्रफलं परिमापनं च ज्ञातुं करिष्यामः। भवन्तः एतत् अजानन् यत् परिमापने वर्धनस्य तात्पर्यम् एतत् नास्ति यत् तस्य क्षेत्रफलम् अपि वर्धिष्यते।
2. एतादृशम् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु यत्र परिमापवर्धने तस्य क्षेत्रफलं वर्धेत ।
3. एतादृशम् उदाहरणद्वयं यच्छन्तु यत्र परिमापवर्धने तस्य क्षेत्रफले वृद्धिः मा भवेत् ।

उदाहरणम् 1 10 मी. $\times$ 10 मी. मापयुतायां भित्त्याम् 3 मी. $\times$ 2 मी. मानयुतस्य एकद्वारस्य कपाटलवनस्य नियोक्तव्यम् अस्ति । यदि 1.मी.^{2} भित्त्यां वर्णालेपनस्य भृत्य-शुल्कं 2.50 रूप्यकाणि स्युः तु सम्पूर्णायां भित्त्यां वर्णालेपनस्य निखिलव्ययं ज्ञायताम् ।

समाधानम् भित्त्यां वर्णः द्वारस्य क्षेत्रफलं विहाय भविष्यति ।

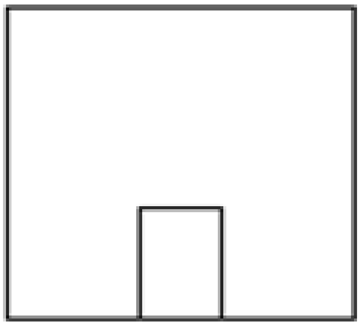
द्वारस्य क्षेत्रफलम् = $l \times b$

= 3×2 मी.^{2} = 6 मी.^{2}

द्वारेण सह भित्तेः क्षेत्रफलम् = भुजा $\times$ भुजा =10 मी. $\times$ 10 मी. = 100 मी.^{2}

द्वारं विना भित्तेः क्षेत्रफलम् = (100 − 6) मी.^{2} $\times$ = 94 मी.^{2}

भित्त्यां वर्णलेपनस्य निखिलाभृत्तिः = 2.50 × 94 = 235 रू.



आकृतिः 11.4

उदाहरणम् 2 एकायताकारस्य आस्तरणस्य क्षेत्रफलम् 500 सेण्टीमीटर^2 अस्ति । यदि आस्तरणस्य दीर्घता 25 सेण्टीमीटर् अस्ति तर्हि अस्य विस्तृतिः का भविष्यति ? आयतकारस्य आस्तरणस्य परिमापः अपि ज्ञायताम् ।

समाधानम् आयताकारस्य आस्तरणस्य क्षेत्रफलम् = 500 सेण्टीमीटर^2

दीर्घता (l) = 25 सेण्टीमीटर्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = l × b (यत्र b = आस्तरणस्य दीर्घता)

अतः विस्तृतिः b = $\frac{\text{क्षेत्रफलमम्}}{l} = \frac{500}{25}$ =20 सेण्टीमीटर्

आस्तरणस्य परिमापः = 2 × (l + b) = 2 × (25 + 20) सेण्टीमीटर्

= 90 सेण्टीमीटरपरिमितः

अनेन प्रकारेण आयताकारस्य आस्तरणस्य विस्तृतिः विंशतिः सेण्टीमीटरपरिमिता (20) तथा च अस्य परिमापः नवतिः सेण्टीमीटरपरमितः (90) इति अस्ति ।

उदाहरणम् 3 अनुः निज गृहस्य पुरतः उद्याने त्रिभागे चत्वरं योजयितुम् इच्छति (आकृतिः 11.5) । एतेषु एकस्याः भुजस्य दीर्घता विंशतिमीटरपरिमिता (20) अस्ति अवशिष्टयोः प्रत्येकं भुजयोः दीर्घता द्वादशमीटरपरिमिता (12) अस्ति । एकपञ्चाशत्शतेन रूप्यकैः (150) प्रति इति स्तरेण अर्घेण चत्वर-व्ययः ज्ञायताम् ।

आकृतिः 11.5

समाधानम् चत्वरस्य आवश्यकी दीर्घता उद्यानस्य तत् परिमापः अस्ति यस्मिन् एकः भुजः सम्मिलितः नास्ति ।

एतत् 20 मी. + 12 मी. + 12 मी. अर्थात् 44 मी. इत्यस्य तुल्यम् अस्ति ।

चत्वरस्य व्ययः = 150 रू. × 44 = 6600 रूप्यकाणि ।

उदाहरणम् 4 वर्गाकार-तन्त्र्याः भुजस्य दीर्घता 10 सेण्टीमीटरमिता अस्ति । यदि तन्त्रीं पुनः वक्रीकृत्य एकम् 12 द्वादशसेण्टीमीटरदैर्घ्यमन्तम् आयतं निर्मामः तदा अस्य आयतस्य विस्तृतिः ज्ञायताम् । कस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति वर्गस्य अथवा आयतस्य ?

समाधानम् वर्गस्य भुजः = 10 सेण्टीमीटर

तन्त्र्याः दीर्घता = वर्गस्य परिमापः = 4 × भुजा = 4 × 10 सेण्टीमीटर

= 40 सेण्टीमीटर

आयतस्य दीर्घता l = 12 सेण्टीमीटर, b इति आयतस्य दीर्घतां मन्वताम्

आयतस्य परिमापः = तन्त्र्याः दीर्घता = 40 सेण्टीमीटर्

आयतस्य परिमापः = 2 (l + b)

अनेन प्रकारेण 40 = 2 (12 + b)

अथवा $\frac{40}{2}$ = 12 + b

अतः, b = 20 −12 = 8 सेण्टीमीटर्

आयतस्य विस्तृतिः 8 सेण्टीमीटर अस्ति ।

वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुज})^2$

$= 10$ सेण्टीमीटर $\times$ 10 सेण्टीमीटर $= 100$ सेण्टीमीटर^2

आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b$

$= 12$ सेण्टीमीटर $\times$ 8 सेण्टीमीटर $= 96$ सेण्टीमीटर^2

अतः, वर्गः अधिकं क्षेत्रफलं परिवेष्टति यद्यपि अस्य परिमापः आयतस्य परिमाणस्य तुल्यम् अस्ति।

उदाहरणम् 5 एकवर्गस्य एकस्य आयतस्य च क्षेत्रफलं तुल्यम् अस्ति यदि वर्गस्य भुजः 40 सेण्टीमीटर् भवेत् आयतस्य च विस्तृतिः 25 सेण्टीमीटर् भवेत्। तदा तु आयतस्य दीर्घता ज्ञायताम् । आयतस्य परिमापः अपि ज्ञायताम्।

समाधानम् वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= (\text{भुजः})^2$

$= 40$ सेण्टीमीटर $\times$ 40 सेण्टीमीटर $= 1600$ सेण्टीमीटर^2

एतत् दत्तं वर्तते यत्

आयतस्य क्षेत्रफलम्	=	वर्गस्य क्षेत्रफलम्
आयतस्य क्षेत्रफलम्	=	1600 सेण्टीमीटर^2
आयतस्य विस्तृतिः	=	25 सेण्टीमीटर
आयतस्य क्षेत्रफलम्	=	$l \times b$
अथवा 1600	=	$l \times 25$
अथवा 1600/25	=	l
अथवा l	=	64 सेण्टीमीटर

अतः आयतस्य दीर्घता (64) चतुष्षष्टिः सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति।

आयतस्य परिमापः $= 2\,(l + b) = 2\,(64 + 25)$ सेण्टीमीटरपरिमितः

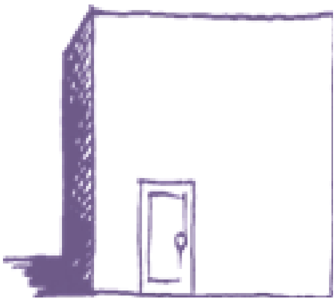
$= 2 \times 89$ सेण्टीमीटर $= 178$ सेण्टीमीटरपरिमितः

अनेन प्रकारेण, आयतस्य परिमापः 178 सेण्टीमीटर् अस्ति यद्यपि अस्य क्षेत्रफलं वर्गस्य क्षेत्रफलस्य समानम् अस्ति।

प्रश्नावली 11.1

1. एकस्य आयताकारस्य भूखण्डस्य दीर्घता विस्तृतिः च क्रमशः पञ्चशतं (500) मीटरपरिमिता एवञ्च त्रिशतं (300) मीटरपरिमिता वर्तते। ज्ञायताम्
(i) भूखण्डस्य क्षेत्रफलम्
(ii) भूखण्डमूल्यं यदि एकवर्गमीटरपरितस्य भूखण्डस्य (1 मी.^{2}) मूल्यम् अयुतम् (10,000) रूप्यकाणि सन्ति।
2. एकस्य वर्गाकारस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलं ज्ञायतां यदि तस्य परिमापः विंशत्यधिकत्रिशतं मीटरपरिमितः (320) अस्ति।
3. एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य विस्तृतिः ज्ञेया यदि तस्य क्षेत्रफलं चत्वारिंशदधिकचतुश्शतं वर्गमीटरपरिमितम् (440 मी.^{2}) दीर्घता च द्वाविंशतिः मीटरपरिमिता (22 मी) स्यात्। अस्य परिमापः अपि ज्ञातव्यः।
4. एकस्य आयताकारस्य आस्तरणस्य परिमापः शतम् (100) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति। यदि दीर्घता पञ्चत्रिंशत् (35) सेण्टीमीटर तर्हि अस्य विस्तृतिः ज्ञायताम्। क्षेत्रफलम् अपि ज्ञायताम्।

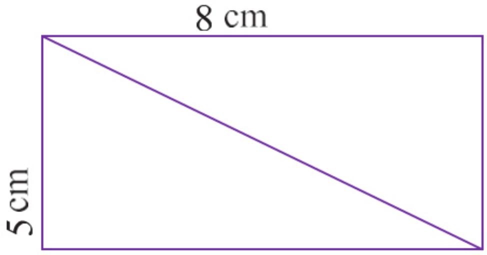
5. एकवर्गाकारस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलम् एकायताकारस्य उद्यानस्य तुल्यम् अस्ति । यदि वर्गाकारस्य उद्यानस्य एका भुजा षष्टिमीटरपरिमिता (60) स्यात् यदि आयतकारोद्यानस्य दीर्घता नवतिः (90) मीटरपरिमिता भवेत् तदा आयतकारोद्यानस्य विस्तृतिः ज्ञेया ।
6. एका तन्त्री आयताकारा वर्तते । अस्याः दीर्घता चत्वारिंशत् (40) सेण्टीमीटरपरिमिता विस्तृतिः च द्वाविंशतिः सेण्टीमीटरपरिमिता (22) अस्ति । यदि तां वक्रीकृत्य पुनः एकवर्गं निर्मामः तर्हि प्रत्येकं भुजायाः मापः किं भविष्यति? एतद् अपि ज्ञायताम् यत् कस्य आकारस्य क्षेत्रफलम् अधिकं भविष्यति ?
7. एकस्य आयतस्य परिमाणः त्रिंशदधिक-एकशतम् (130) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति । यदि आयतस्य विस्तृतिः त्रिंशत् सेण्टीमीटरपरिमिता (30) भवेत् तदा आयतस्य दीर्घता ज्ञातव्या । आयतस्य क्षेत्रफलम् अपि ज्ञायताम् ।
8. द्विमीटरपरिमितं दैर्घ्यमत् तथा च एकं मीटरपरिमितं विस्तृतिमत् द्वारम् एकस्यां भित्तौ नियोजयामः । भित्तेः दीर्घता 4.5 मीटरपरिमिता विस्तृतिः च 3.6 मीटरपरिमिता वर्तते आकृतिः11.6 (आकृतिः11.6) । विंशतिः रूप्यकाणि (20) वर्गमीटरपरिमितेन अर्घेण भित्त्यां श्वेततां (white wash) कारयितुं व्ययः ज्ञायताम् ।



आकृतिः 11.6

11.2.1 आयतस्य भागरूपे त्रिभुजम्

(8) अष्टौ सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च (5) पञ्च सेण्टीमीटरपरिमितं भुजयुतम् एकम् आयतं स्वीकुर्वन्तु । आयतं विकर्णस्य अनुदिशम् एवं कर्तयन्तु येन त्रिभुजद्वयं प्राप्तं स्यात् (आकृतिः11.7)।
एकं त्रिभुजं द्वितीयस्मिन् त्रिभुजे स्थापयन्तु ।
किम् एते त्रिभुजे पूर्णतया तुल्ये स्तः ?
किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफले समाने स्तः ?
किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे अपि स्तः ?
एतयोः त्रिभुजयोः प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं कियत् अस्ति ?
भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलस्य योगफलम् आयतस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यम् अस्ति ।

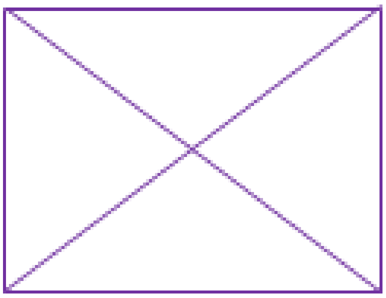


आकृतिः 11.7

$$\text{प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{2}(\text{आयतस्य क्षेत्रफलम्})$$

$$= \frac{1}{2}\times(l\times b) = \frac{1}{2}(8\times5)$$

$$= \frac{40}{2} = 20 \text{ सेण्टीमीटर}^2$$



आकृतिः 11.8

अधुना पञ्चसेण्टीमीटरपरिमितम् (5) भुजामन्तं वर्गं स्वीकुर्वन्तु एतं च चतुर्षु (4) त्रिभुजेषु विभजन्तु यथा आकृत्यां दर्शितं वर्तते (आकृतिः11.8)।

किं चतुर्णां त्रिभुजानां क्षेत्रफलं समानम् अस्ति ?

किं तानि अन्योऽन्यं सर्वाङ्गसमानानि सन्ति ? (त्रिभुजानि परस्परं वैपरीत्येन स्थापयन्तु)

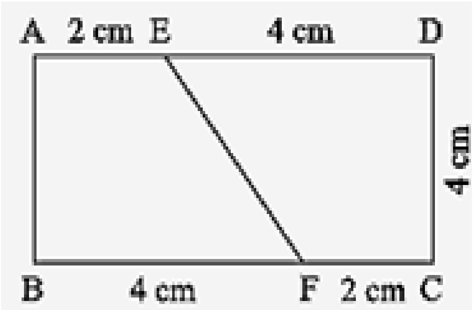
$$\text{प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{4}(\text{वर्गस्य क्षेत्रफलम्})$$

$$= \frac{1}{4}(\text{भुज})^2 = 1/4\ (5)^2 \text{ सेण्टीमीटर}^2$$

$$= 6.25 \text{ सेण्टीमीटरपरिमित}^2$$

11.2.2 आयतस्य अन्येभ्यः सर्वाङ्गसमभागेभ्यः व्यापीकरणम्

6 सेण्टीमीटरदीर्घता 4 सेण्टीमीटरविस्तृतवान् आयतः भागद्वये विभक्तं यथा आकृत्यां प्रदर्शितम् आकृतिः 11.9) । आयतं द्वतीये कागदे अनुकुर्वन्तु आयतं च EF इत्यस्य अनुदिशं छित्वा द्वयोः भागयोः विभजन्तु ।



आकृतिः 11.9

एकभागं द्वितीये भागे स्थापयन्तु अवलोकयन्तु च यत् तौ अन्योऽन्यं पूर्णतया आच्छादयतः (भवद्भिः एतौ परिभ्रमितुम् अपि शक्येते)

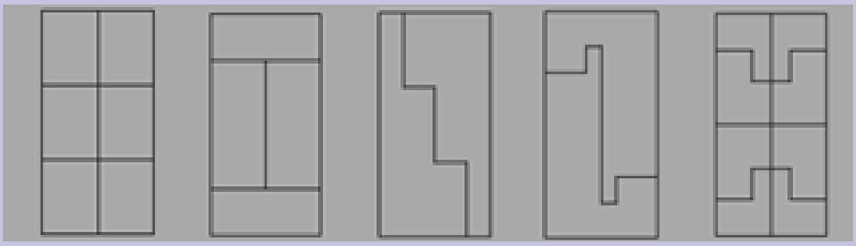
किम् एतौ सर्वाङ्गसमौ स्तः ? द्वावपि भागौ परस्परं सर्वाङ्गसमौ स्तः । अनेन प्रकारेण, एकभागस्य क्षेत्रफलं द्वितीयभागस्य क्षेत्रफलस्य समानं तुल्यं वा अस्ति ।

अतः प्रत्येकं सर्वाङ्गसमभागस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}$ (आयतस्य क्षेत्रफलम्)

= 1/2 (6×4) सेण्टीमीटर^2 = 12 सेण्टीमीटर^2

एतान् कुर्वन्तु

अधः प्रदत्ताः एकैकाः आयताः यस्य दीर्घता षट् सेण्टीमीटरपरिमिता (6) एवञ्च विस्तृतिः चतुस्सेण्टीमीटरपरिमिता (4) अस्ति सर्वाङ्गसमैः बहुभुजैः मेलनेन निर्मिताः सन्ति । प्रत्येकं बहुभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् ।



11.3 समान्तर-बहुभुजस्य क्षेत्रफलम्

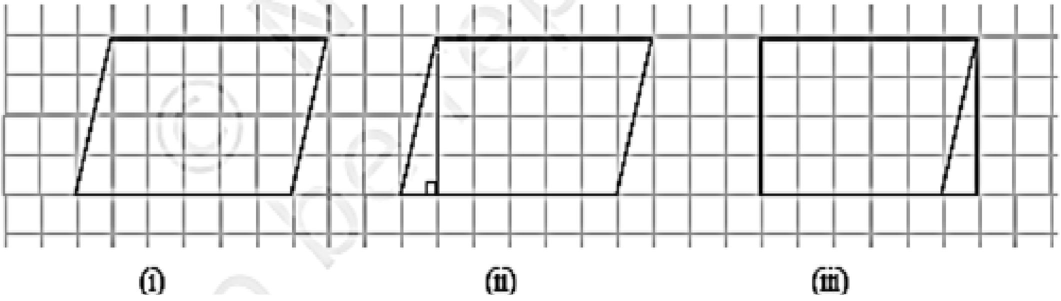
अस्माकं पुरतः वर्गान् आयतान् च अतिरिच्य बहवः अन्याकाराः दृष्टिपथे आयान्ति ।

भवन्तः एकस्य भूखण्डस्य क्षेत्रफलं कथं ज्ञास्यन्ति यस्य आकारः समान्तरचतुर्भुजवद् विद्यते ?

आगच्छन्तु समान्तर-चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलप्राप्तेः एकविधिं जानीमः ।

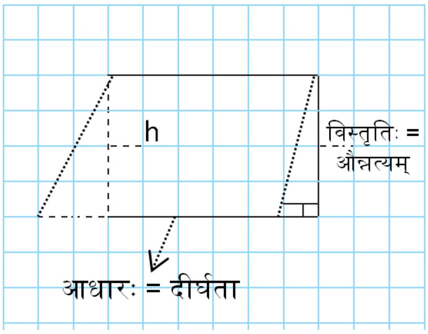
किम् एकं समान्तरचतुर्भुजं समानक्षेत्रफलवति आयते रूपान्तरितं कर्तुं शक्यते ?

एकस्मिन् बिन्दुरेखापुटे (graph paper) एकं समान्तरचतुर्भुजं निर्मान्तु यथाहि आकृतिः [11.10 (i)] मध्ये दर्शितम् । एतं समान्तरचतुर्भुजं छिन्दन्तु । समान्तरचतुर्भुजस्य एकस्मात् शीर्षाद् अस्य सम्मुखभुजायाम् एकं लम्बम् आलिखन्तु [आकृतिः11.10(ii)] । एतत् त्रिभुजं छिन्दन्तु एतच्च त्रिभुजं समान्तरचतुर्भुजस्य अपरभुजया सह स्थापयन्तु । [आकृतिः 11.10(iii)]।



आकृतिः 11.10

भवन्तः कीदृग् आकारं प्राप्नुवन्ति ? भवन्तः एकम् आयतं प्राप्नुवन्ति।
किं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यं वर्तते ?
आम्, समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफल्म् = निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्
आयतस्य दीर्घता विस्तृतिः च किम् अस्ति ?
अस्माभिः दृष्टं यत् निर्मितस्य + आयतस्य दीर्घता समान्तरचतुर्भुजस्य आधारस्य दीर्घतायाः समाना अस्ति आयतस्य विस्तृतिः च समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यस्य तुल्या वर्तते (आकृतिः11.11)।



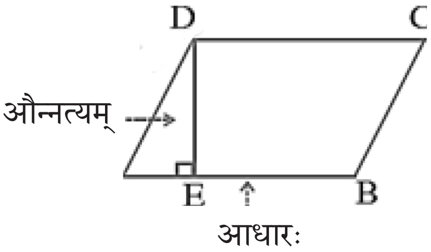
आकृतिः 11.11

समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफल्म् = आयतस्य क्षेत्रफलम्

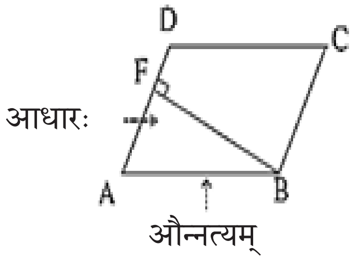
= दीर्घता × विस्तृतिः = $l \times b$

किन्तु आयतस्य दीर्घता l तथा च विस्तृतिः b क्रमशः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारः b औन्नत्यं च h इति एव अस्ति।
अनेन प्रकारेण, समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः × औन्नत्यम् = $b \times h$

वयं समान्तरचतुर्भुजस्य यां कामपि भुजाम् आधारं स्वीकर्तुं शक्नुमः। अस्यां भुजायाम्, सम्मुखशीर्षतः पातितलम्बः,अस्य औन्नत्यम् इति कथ्यते।

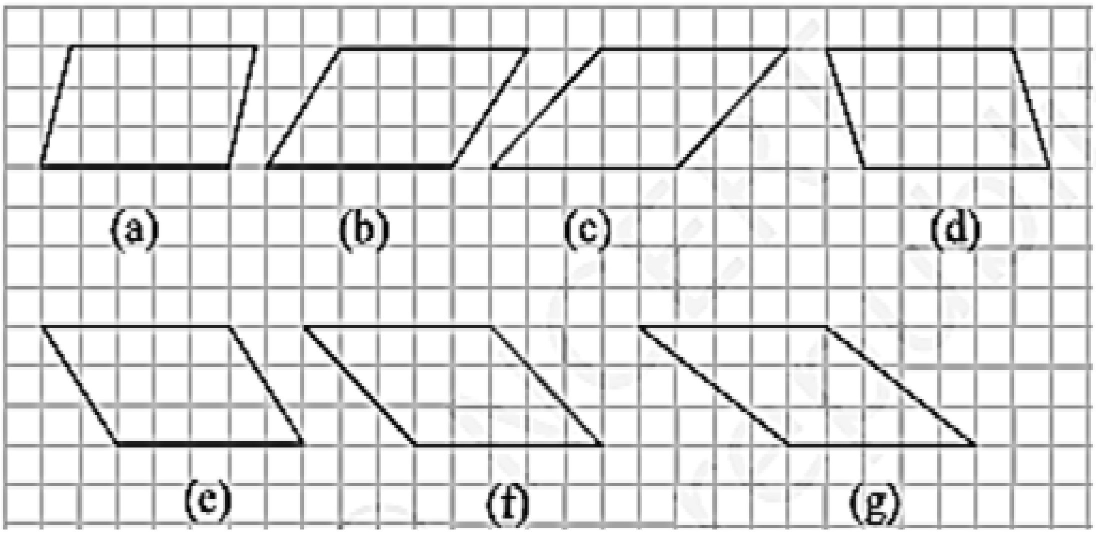


ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे DE इति AB अस्मिन् लम्बः अस्ति। AB इति आधारः तथा च DE समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यम् अस्ति।



ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे, BF इति सम्मुखन्याम् AD इति भुजे पातितलम्बः अस्ति। अत्र AD इति आधारः BF इति च औन्नत्यम् अस्ति।

अधोदत्तानां समान्तर-चतुर्भुजानां विषये विचारयन्तु (आकृतिः 11.12)।

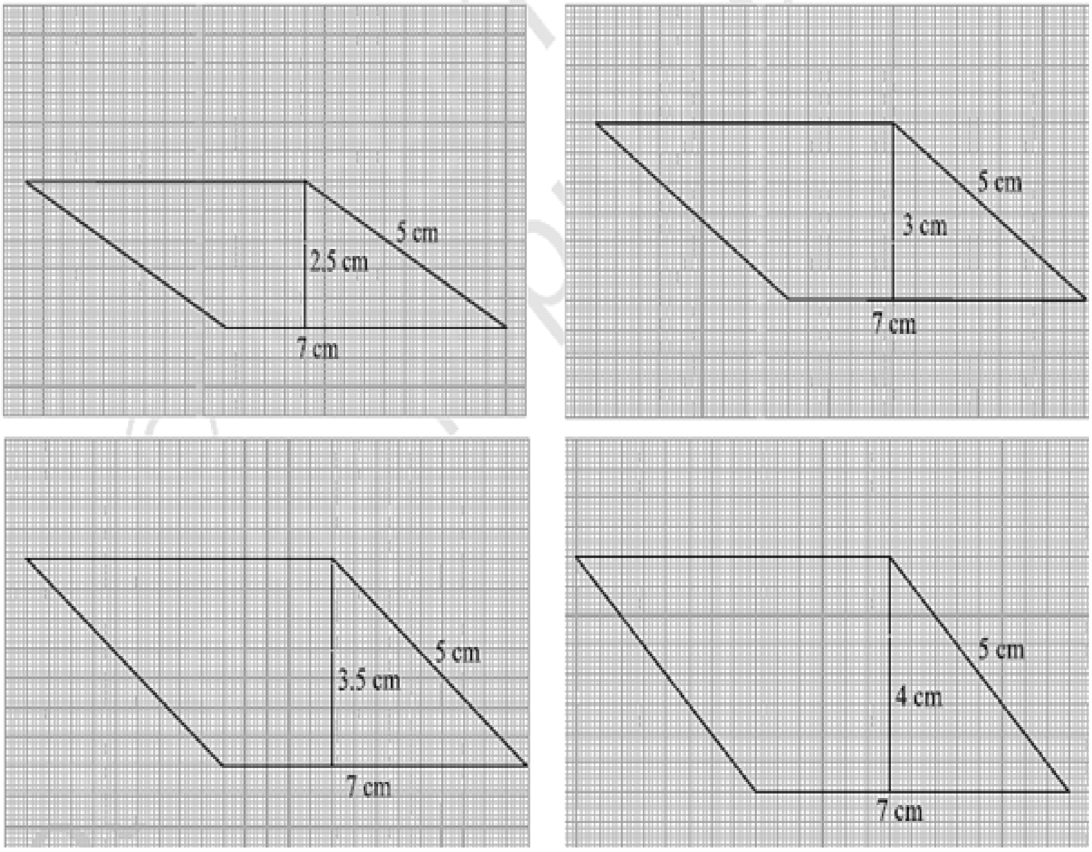


आकृतिः 11.12

आकृतिभिः आवेष्टितानां वर्गाणां सङ्ख्यां परिगणय्य समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं ज्ञायतां तथा च भुजाः मीत्वा परिमापः अपि ज्ञायताम्।
निम्न-तालिकां पूरयन्तु -

समान्तर-चतुर्भुजः	आधारः	औन्नत्यम्	क्षेत्रफलम्	परिमापः
(a)	5 एककम्	3 एककम्	$5 \times 3 = 15$ वर्गः एककम्	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एतेषां समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं तु समानम् अस्ति किन्तु परिमापाः पृथक् सन्ति। अधुना सप्त (7) सेण्टीमीटरपरिमितं पञ्च (5) च सेण्टीमीटरपरिमितं भुजामन्ति समान्तरचतुर्भुजानि पश्यामः (आकृतिः 11.13)।



आकृतिः 11.13

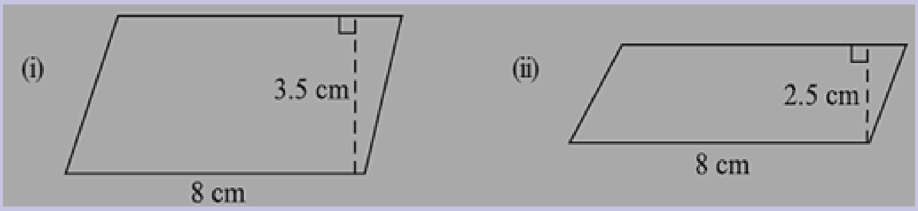
प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजस्य परिमापं क्षेत्रफलं च जानन्तु। स्वस्य परिणामस्य विश्लेषणं कुर्वन्तु।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं पृथक् अस्ति किन्तु परिमापः समानः अस्ति।

एतद् दर्शयति यत् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवद्भिः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारः तथा च सङ्गतम् औन्नत्यम् अपि ज्ञातव्यं भवति।

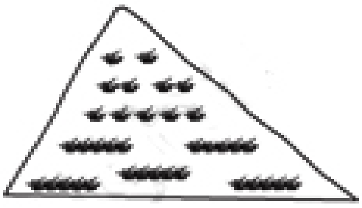
एतान् कुर्वन्तु

निम्न-समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु ।



(iii) ABCD इत्यस्मिन् समान्तरचतुर्भुजे AB = 7.2 सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च C इत्यस्माद् बिन्दोः AB इत्यस्य भुजस्य लम्बः 4.5 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति ।

11.4 त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्



एकः उद्यानपालः एकस्मिन् त्रिकोणे उद्याने तृण-वपनस्य व्ययं ज्ञातुम् इच्छति ।

अस्यां स्थितौ अस्माभिः त्रिभुजाकार-क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातव्यम् ।

आयान्तु एकस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलप्राप्तेः विधिं जानीमः।

एकस्मिन् कागद-खण्डे एकं विषमबाहुत्रिभुजं रचयन्तु । एतत् त्रिभुजं छिन्दन्तु । अनेन प्रकारेण भवतः पार्श्वे समान-परिमापस्य द्वे विषमबाहुत्रिभुजे स्तः । किम् एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे स्तः ?

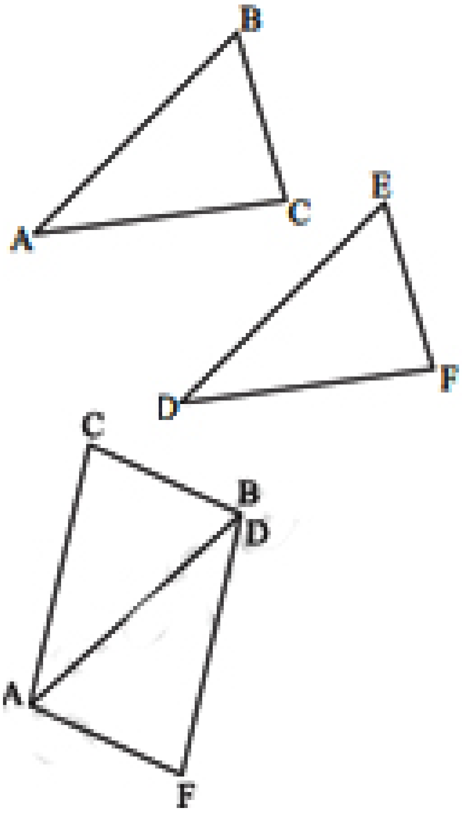
एकं त्रिभुजं द्वितीय-त्रिभुजे त्रिभुजे स्थापयन्तु येन ते परस्परं आच्छादयेताम् । भवन्तः तयोः एकं त्रिभुजं परिभ्रामयितुम् अपि शक्नुवन्ति ।

सम्प्रति द्वे त्रिभुजे तथा अन्योऽन्यं स्थापयन्तु येन तयोः सङ्गतभुजाः परस्परं मिलेयुः (यथा 11.14 इति आकृत्यां प्रदर्शितं वर्तते)।

किम् अनेन प्रकारेण निर्मिता आकृतिः एकं समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति ? प्रत्येकं त्रिभुज-क्षेत्रफलस्य तुलनां समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलेन कुर्वन्तु ।

त्रिभुजानाम् आधारस्य औन्नत्यस्य च तुलना समान्तरचतुर्भुजस्य आधारेण औन्नत्येन च कुर्वन्तु ।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः योगफलं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य तुल्यम् अस्ति । त्रिभुजस्य आधारः एवञ्च औन्नत्यं क्रमशः समान्तरचतुर्भुजस्य आधारस्य औन्नत्यस्य च समानम् अस्ति ।



आकृतिः 11.14

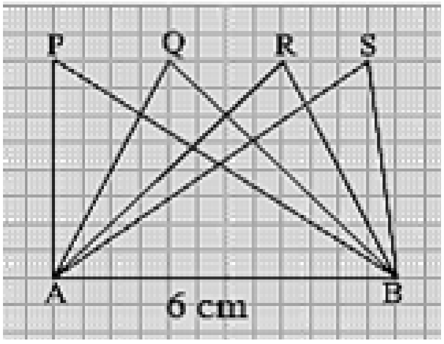
प्रत्येकं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ (समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्)

= $\frac{1}{2}$(आधारः× औन्नत्यम्) (यतोहि समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः× औन्नत्यम्)

= $\frac{1}{2}$(आ.×औ.) (अथवा = $\frac{1}{2}$ आ.औ.इति सङ्क्षेपेण)

एतान् कुर्वन्तु

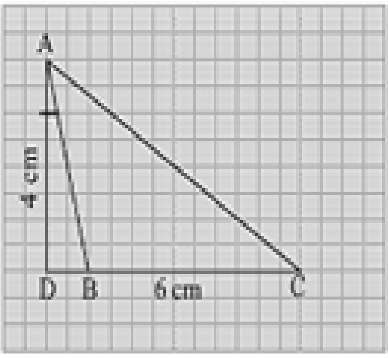
1. उपरि प्रदत्तान् क्रियाकलापान् भिन्नप्रकारकाणि त्रिभुजानि स्वीकृत्य कुर्वन्तु।
2. भिन्नप्रकारकाणि समान्तरचतुर्भुजानि स्वीकुर्वन्तु। प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजं द्वयोः त्रिभुजयोः एकस्य विकर्णस्य अनुदिशं छिन्दन्तु। किम् एतानि त्रिभुजानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति।



आकृतिः 11.15

(11.15) इति आकृत्यां सर्वाणि अपि त्रिभुजानि AB = 6 इति षट् सेण्टीमीटरपरिमिते आधारे स्थितानि सन्ति।
AB इत्यस्मिन् आधारे प्रत्येकं त्रिभुजस्य सङ्गतौन्नत्यस्य विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् सर्वेषां त्रिभुजानां क्षेत्रफलानि समानानि सन्ति ? आम्।
किं त्रिभुजं सर्वाङ्गसमम् अस्ति ? न।
वयं निष्कर्षं निस्सारयामः यत् **सर्वेषां सर्वाङ्गसम-त्रिभुजानां क्षेत्रफलं समानं भवति किन्तु एतद् आवश्यकं भवेत् यत् तानि त्रिभुजानि येषां क्षेत्रफलं समानं भवति तानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति।**

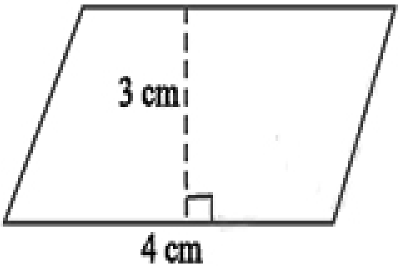
एकम् 6 सेण्टीमीटरपरिमितम् आधारमत् ABC इति अधिककोणत्रिभुजम् (obtuse angled triangle) विचारयामः। (आकृतिः 11.16)।
अस्य AD इति औन्नत्यम् A इत्यस्मात् शीर्षात् DC इत्यस्मिन् आधारे एकः लम्बः अस्ति यः त्रिभुजस्य बहिः स्थितः वर्तते। किं भवन्तः अस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 11.16

उदाहरणम् 6 एकस्य समान्तरचतुर्भुजस्य एकः भुजः सङ्गतौन्नत्यं च क्रमशः 4 सेण्टीमीटर्मितम् तथा च 3 सेण्टीमीटर् वर्तते। समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् (आकृतिः 11.17)।

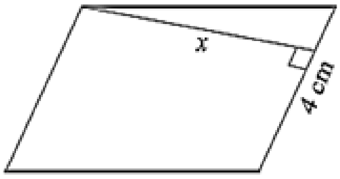
समाधानम् आधारस्य प्रदत्तं दैर्घ्यम् अस्ति (b) = 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितम्
औन्नत्यं च (h) = 3 सेण्टीमीटरपरिमितम्
समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = $b \times h$ = 4 चतुस्सेण्टीमीटरपरिमितम् × 3 त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् = 12 द्वादशवर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।



आकृतिः 11.17

उदाहरणम् 7 यदि एकस्य समान्तरचतुर्भुजस्य (आकृतिः 11.18) क्षेत्रफलम् चतुर्विंशतिः वर्गसेण्टीमीटर परिमितम् (24) आधारः च 4 सेण्टीमीटरपरिमितः भवेत् तदा औन्नत्यं ‘x’ इति ज्ञायताम्।

समाधानम् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = $b \times h$
अतः $24 = 4 \times x$
अथवा $\frac{24}{4} = x$
अथवा $x = 6$ सेण्टीमीटरपरिमितम्



आकृतिः 11.18

अनेन प्रकारेण समान्तरचतुर्भुजस्य औन्नत्यं 6 सेण्टीमीटरपरिमितम्।

उदाहरणम् 8 ABCD इति समान्तरचतुर्भुजस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घता 6 सेण्टीमीटरपरिमिता 4 सेण्टीमीटरपरिमिता च विद्यते।

CD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यं त्रिसेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति (आकृतिः 11.19)। ज्ञायताम्
(i) समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्। (ii) AD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यम्।

समाधानम्

(i) समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् $= b \times h$

$= 6$ से.मी. $\times$ 3 से.मी. $=$ 18 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

(ii) आधारः (b) $=$ 4 सेण्टीमीटरपरिमितः

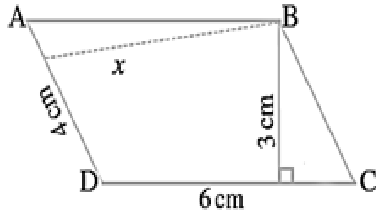
औन्नत्यम् $= x$ (मन्यन्ताम्)

क्षेत्रफलम् $=$ 18 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् $= b \times x$

$$18 = 4 \times x$$

$$\frac{18}{4} = x$$

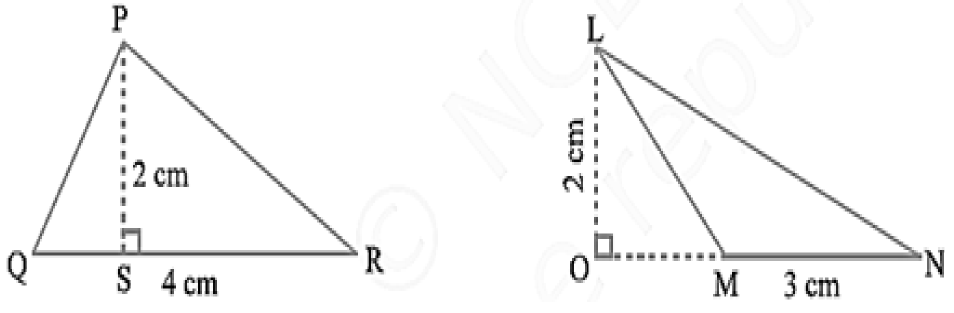


अतः $x = 4.5$ सेण्टीमीटर्परिमितम्

आकृतिः 11.19

अनेन प्रकारेण AD इति आधारस्य सङ्गतौन्नत्यम् 4.5 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति।

उदाहरणम् 9 निम्न-त्रिभुजयोः क्षेत्रफलं ज्ञायताम् (आकृतिः 11.20)।



(i) **आकृतिः 11.20** **(ii)**

समाधानम्

(i) त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}\, b\, h \;= \frac{1}{2} \times QR \times PS$

$= \frac{1}{2} \times$ 4 से. मी. $\times$ 2 से.मी. $=$ 4 सेण्टीमीटरपरिमितम्।

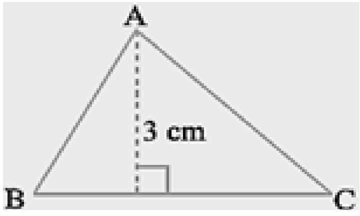
(ii) त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}\, b\, h = \frac{1}{2} \times MN \times LO$

$= \frac{1}{2} \times$ 3 से.मी. $\times$ 2 से.मी. $=$ 3 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

उदाहरणम् 10 BC इति ज्ञायतां यदि ABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् सेण्टीमीटरपरिमितम् (36) AD इति औन्नत्यं 3 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति (आकृतिः 11.21)।

समाधानम् औन्नत्यं = 3 सेण्टीमीटरपरिमितम्, क्षेत्रफलम् = 36 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्।

ABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ bh



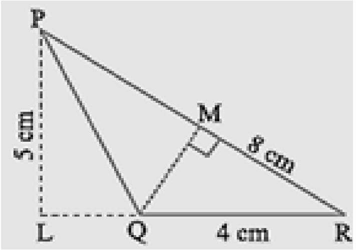
आकृतिः 11.21

$36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$

$b = \frac{36 \times 2}{3}$ = 24 सेण्टीमीटर्परिमितम्

अतः BC = 24 सेण्टीमीटर्परिमितम्

उदाहरणम् 11 ΔPQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे PR = 8 सेण्टीमीटरपरिमितः QR = 4 चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितः PL = 5 पञ्चसेण्टीमीटर्परिमितम् (आकृतिः 11.22)। ज्ञायताम् (i) PQR इत्यस्य क्षेत्रफलम् (ii) QM



आकृतिः 11.22

समाधानम् (i) आधारः =4चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितः।

औन्नत्यम् = 5 पञ्चसेण्टीमीटरपरिमितम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h

$= \frac{1}{2} \times$ 4 से.मी. × 5 से.मी.

= 10 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम्^{2}।

(ii) आधारः = 8 सेण्टीमीटर्परिमितम् औन्नत्यम् =?,

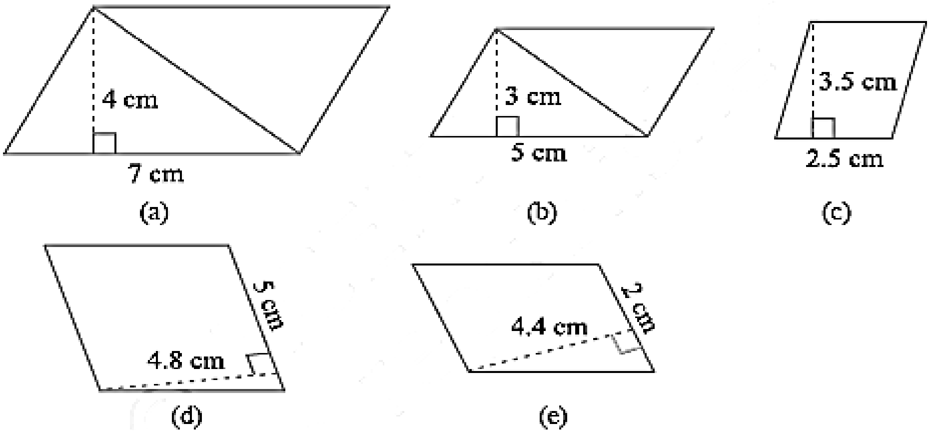
क्षेत्रफलम् = 10 वर्गसेण्टीमीचर्मितम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ b h, अर्थात् $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

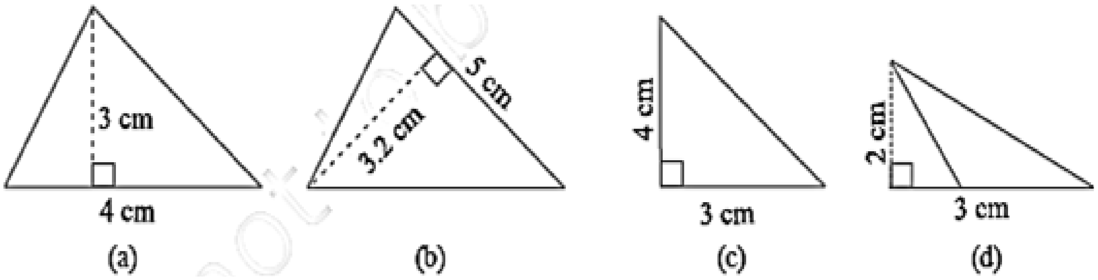
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ =2.5 अतः QM इति कर्णः = 2.5 सेण्टीमीटरपरिमितः।

प्रश्नावली 11.2

1. निम्नेषु प्रत्येकं समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु -



2. निम्नेषु प्रत्येकं त्रिभुजानां क्षेत्रफलं ज्ञायताम् -



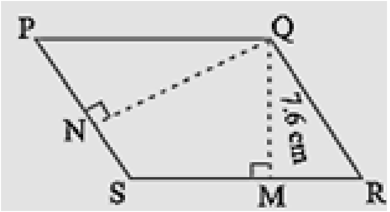
3. रिक्तस्थानानां मानं ज्ञायताम् -

क्र.म.	आधारः	औन्नत्यम्	समान्तरचतुर्भुजानां क्षेत्रफलं
a	20 से.मी.		246 से.मी^{2}
b		15 से.मी.	154.5 से.मी^{2}
c		8.4 से.मी.	48.72 से.मी^{2}
d	15.6 से.मी.		16.38.से.मी^{2}

4. रिक्तस्थानानां मानं जानन्तु -

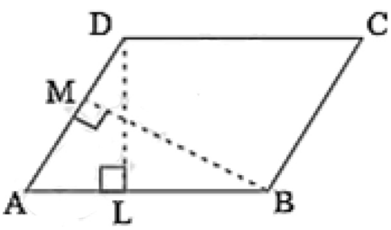
आधारः	औन्नत्यम्	त्रिभुजानां क्षेत्रफलम्
15 से.मी.	________	87 से.मी^{2}
_______	31.4 मि.मी.	1256 मि.मी^{2}
22 से.मी.	________	170.5 से.मी^{2}

5. PQRS इति एकं समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति (आकृतिः 11.23) । QM इति Q इति शीर्षात् SR यावत्पर्यन्तम् औन्नत्यम् अस्ति तथा च QN इति Q इति शीर्षात् PS यावत्पर्यन्तम् औन्नत्यम् अस्ति । यदि - SR = 12 सेण्टीमीटर्परिमितम् तथा च QM = 7.6 सेण्टीमीटरपरिमितमितः भवेतां तदा ज्ञायताम् -
   (a) PQRS इति समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्
   (b) यदि PS = 8 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति तदा QN ज्ञायताम् ।



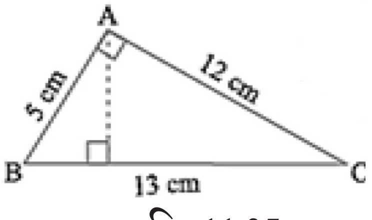
आकृतिः 11.23

6. ABCD समान्तरचतुर्भुजस्य DL इति अथ च BM इति क्रमशः भुजे AB इति अथ च AD इति इत्येतयोः भुजयोः उपरि लम्बौ स्तः (आकृतिः 11.24) । यदि समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् 1470 वर्गसेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति एवञ्च AB = 35 से.मी.तथा च AD = 49 से.मी. अस्ति तदा BM अथ च DL इत्यनयोः दैर्घ्यं ज्ञायताम् ।



आकृतिः 11.24

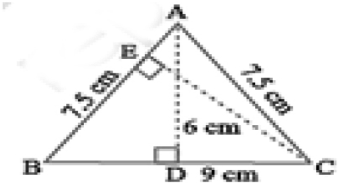
7. ABC इत्यस्मिन् त्रिभुजम् A इत्यत्र समकोणः अस्ति (आकृतिः 11.25) तथा च AD इति BC इत्यस्मिन् भुजे लम्बः अस्ति। यदि AB = (5) पञ्च सेण्टीमीटरपरिमिता, BC = 13 त्रयोदशसेण्टीमीटरपरिमिता अथ च AC = 12 द्वादश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति तदा ΔABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् । AD इति भुजे दीर्घता अपि ज्ञायातम् ।



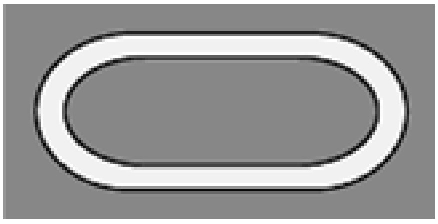
आकृतिः 11.25

8. ΔABC इति एकं समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति यस्मिन् AB = AC = 7.5 सेण्टीमीटरपरिमिते तथा च BC = 9 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति (आकृतिः11.26)।

A इत्यस्माद् बिन्दुतः BC इति पर्यन्तम् औन्नत्यम् AD = 6 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति । ΔABC इत्यस्य क्षेत्रफलं जानन्तु । C इत्यस्मात् AB इति पर्यन्तम् औन्नत्यम् अर्थात् CE इति (औन्नत्यम्) किं भविष्यति ?



आकृतिः 11.26



आकृतिः 11.27

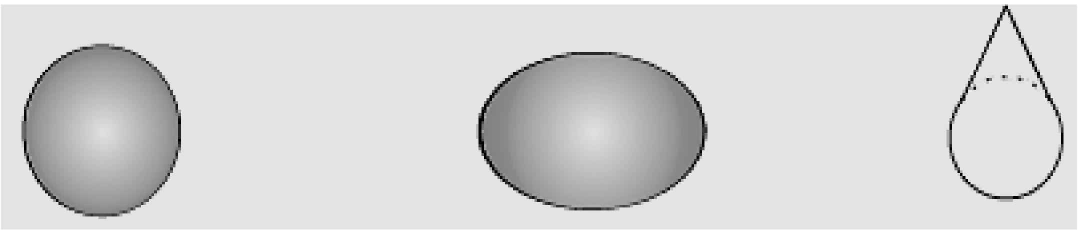
11.5 वृत्तम्

एकः धावनपन्थाः स्व-उपान्तभागयोः अर्धवृत्ताकारः अस्ति (11.27 आकृतिः)।

भवन्तः किम् एकेन धावकेन लङ्घित-दीर्घतां ज्ञातुं शक्नुवन्ति यदि सः अस्य धावनपन्थानः सम्पूर्णाम् आवृत्तिद्वयं करोति । यदा आकारः वृत्ताकारः भवेत् तदा अस्माभिः तं परितः दूरता-प्राप्तेः एकः विधिः अवश्यमेव ज्ञातव्यः ।

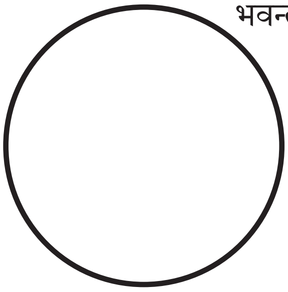
11.5.1 वृत्तस्य परिधिः

तान्या संसृष्ट-पत्रात् वलिताकार-रूपेण पृथक् स्थूल-कागदानि कर्तयति । सा एतानि स्थूलकागदानि सज्जीकर्तुम् एतानि परितः जालाभरणं योक्तुम् इच्छति । एकैकस्मै तया कियत् दीर्घमानं जालाभरणम् अपेक्षते (आकृतिः 11.28)



(a) (b) (c)

आकृतिः 11.28

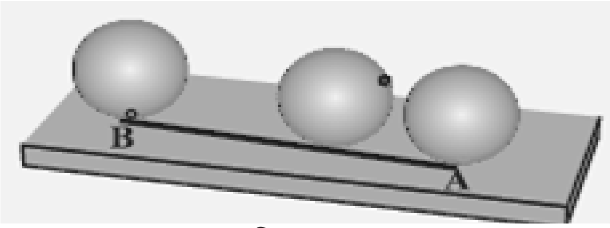


आकृतिः 11.29

भवन्तः एकेन मापकेन एकं वक्रं (curve) वलयं वा मातुं न शक्नुवन्ति यतो हि इमाः आकृतयः सरलाः न सन्ति । अधुना भवन्तः किं करिष्यन्ति ?

11. 28 (a) इति आकृतौ प्रदत्ताकारस्य अपेक्षितस्य जालाभरणस्य दूरतां ज्ञातुं भवतां कृते अत्र एकः उपायः प्रकारः वा सूच्यते । स्थुल-कागदस्य जालाभरणे एकं बिन्दुम् अङ्कयन्तु तत् च उत्पीठे स्थापयन्तु । बिन्दोः स्थितिम् उत्पीठे अपि अङ्कयन्तु (आकृतिः 11.29)।

इदानीं वलयाकारं स्थूल-कागदम् एकस्यां सरलदिशि उत्पीठिकायां तावत्पर्यन्तं भ्रामयन्तु यावत्पर्यन्तम् अङ्कितबिन्दुः पुनः उत्पीठिकां स्पृशेत् । एतत् दूरत्वं रेखायाः अनुदिक् मान्तु । एतत् अपेक्षितस्य जालाभरणस्य दूरता वर्तते । इयं स्थूल-कागदे अङ्कितबिन्दुतः स्थूल-कागदस्य उपान्तभागात् तम् एव बिन्दुपर्यन्तं दूरता अस्ति ।



आकृतिः 11.30

भवन्तः वृत्ताकारं वस्तु परितः उपान्तभागे एकं सूत्रं संस्थाप्य अपि दूरतां ज्ञातुं शक्नुवन्ति ।

एकं वृत्ताकारक्षेत्रं परितः दूरत्वम् अस्य परिधिः इति कथ्यते ।

एतान् कुर्वन्तु

एकस्याः कूप्याः उदञ्चनं पिधानम्, एकं कङ्कणम् अन्य-वृत्ताकारं किञ्चित् वस्तु स्वीकृत्य एतेषां परिधिं ज्ञातं कुर्वन्तु।

किम् अधुना भवन्तः अनेन विधिना एकेन धावकेन एकस्य मार्गस्य क्रमितदूरत्वं ज्ञातुम् अर्हन्ति।

अधुनापि पन्थानं परितः दूरतायाः (ज्ञानार्थं) तथा च अन्यस्य कस्यचित् वृत्ताकारवस्तुनः सूत्रेण मापनम् अतीव कठिनं भविष्यति। तथापि अयः मापः शुद्धः यथार्थः वा न भविष्यति।

अतः एतदर्थम् अस्माकं कृते एकस्य सूत्रस्य आवश्यकता वर्तते यथा तलाकृतीनाम् अथवा तलाकाराणां कृते वयं प्रयुङ्क्तवन्तः।

आयान्तु वयं पश्यामः यत् किं वृत्तानां व्यासपरिध्योः किमपि सम्बन्धम् अस्ति।

निम्न-तालिकायाः उपरि विचारं कुर्वन्तु। भिन्नत्रिज्यानां षड् वृत्तानि आलिखन्तु सूत्रेण च तेषां परिधिः ज्ञायताम्। परिधिव्यासयोः अनुपातम् अपि जानन्तु।

वृत्तम्	त्रिज्या	व्यासः	परिधिः	परिधि-व्यासयोः अनुपातः
1.	3.5 से.मी.	7.0 से.मी.	22.0 से.मी.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 से.मी.	14.0 से.मी.	44.0 से.मी.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 से.मी.	21.0 से.मी	66.0 से.मी.	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 से.मी.	42.0 से.मी.	132.0 से.मी.	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 से.मी.	10.0 से.मी.	32.0 से.मी.	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 से.मी.	30.0 से.मी.	94.0 से.मी.	$\frac{94}{30} = 3.13$

उपरि प्रदत्ततालिकातः भवन्तः कं निष्कर्षं निष्कास्यामः ? किम् एषः अनुपातः प्रायशः समानः अस्ति ? आम्। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एकस्य वृत्तस्य परिधिः सदैव अस्य व्यासात् त्रिगुणितम् वर्तते ? आम्।

एषः अनुपातः स्थिरः अस्ति अयं च ‘πr^2’(pi) पाई इत्यनेन प्रदर्श्यते। अस्य मानः प्रायेण $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 इति अस्ति।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{c}{d} = \pi$ इति अस्ति, यत्र ‘c’ इति वृत्तस्य परिधिं तथा च ‘d’ इति अस्य व्यासं दर्शयति।

अथवा $C = \pi d$

वयं जानीमः यत् एकस्य वृत्तस्य व्यासः ‘d’, (r) इति त्रिज्यायाः द्विगुणितः भवति। अर्थात् $d = 2r$

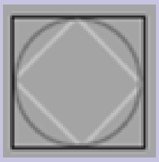
अतः $C = \pi d = \pi \times 2r$ अथवा $C = 2\pi r$

एतान् कुर्वन्तु

11.31 इति आकृतौ

(a) कतमस्य वर्गस्य परिमापः अधिकः अस्ति ?

(b) कतमः अधिकः अस्ति, लघु-वर्गस्य परिमापः अथवा वृत्तस्य परिधिः ?



आकृतिः 11.31

एतान् कुर्वन्तु

एकां पाद-भागीय-परिमिताम् स्थालिकां अथ च एकाम् अर्धस्थालिकां स्वीकुर्वन्तु । प्रत्येकम् उत्पीठिकायाः उपरितने तले एकं वारं भ्राम्यन्तु । कतमा स्थालिका एकस्याम् आवृत्तौ अधिकं दूरं क्रमति ? कतमा स्थालिका न्यूनावृतिषु उत्पीठिकायाः उपरितनभागस्य दैर्घ्यं क्रमिष्यति ?

उदाहरणम् 12 10 सेण्टीमीटरपरिमितस्य व्यासमतः एकस्य वृत्तस्य परिधिः ज्ञायताम् (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

समाधानम् वृत्तस्य व्यासः (d) = 10 से.मी.

वृत्तस्य परिधिः = πd

= 3.14 × 10 से.मी. = 31.4 सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः 10 सेण्टीमीटरपरिमितस्य व्यासमतः वृत्तस्य परिधिः 31.4 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति ।

उदाहरणम् 13 एकस्याः वृत्ताकारचषकाधान्याः (disc) परिधिः ज्ञायताम् यस्याः त्रिज्या 14 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति ।

$\left(\text{प्रयोगं कुर्वन्तु } \pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधानम् वृत्ताकारचषकाधान्याः (disc) त्रिज्या (r) = 14 सेण्टीमीटरपरिमिता

वृत्ताकारचषकाधान्याः परिधिः = 2 πr

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ से.मी. = 88 सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः वृत्ताकारचषकाधान्याः परिधिः अष्टाशीतिः (88) सेण्टीमीटरपरिमिता वर्तते ।

उदाहरणम् 14 एकस्याः वृत्ताकार-प्रवाहनलिकायाः त्रिज्या दश(10) सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। प्रवाहनलिकां परितः एकवारं संश्लेषिका-संवेष्टनस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं ज्ञायताम् (प्रयोगं कुर्वन्तु π = 3.14)।

समाधानम् प्रवाहनलिकायाः त्रिज्या (r) = 10 सेण्टीमीटरपरिमिता संश्लेषिका आवश्यकं दैर्घ्यम्, प्रवाहनलिकायाः परिधेः समानम् अस्ति ।

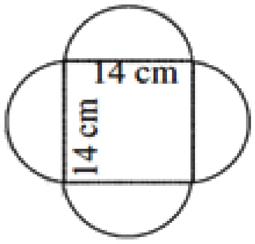
प्रवाहनलिकायाः परिधिः = 2 πr

= 2 × 3.14 × 10 से.मी. = 62.8 सेण्टीमीटरपरिमिता

अतः प्रवाहनलिकां परितः एकवारं संश्लेषिका-संवेष्टनस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं 62.8 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ।

उदाहरणम् 15 प्रदत्तायाः आकृत्याः परिमापः ज्ञायताम् (आकृतिः 11.32)।
($\pi = \frac{22}{7}$)।

समाधानम् अस्याम् आकृत्याम् अस्माभिः वर्गस्य प्रतिदिशं स्थितस्य अर्धवृत्तस्य परिधिः ज्ञातव्या। किं भवतां कृते वर्गपरिमापस्य ज्ञानम् अपि आवश्यकम् अस्ति ? न। अस्याः आकृतेः बाह्यपरिसीमा अर्धवृत्तैः निर्मिता। एकैकस्य अर्धवृत्तस्य व्यासः (14) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति।



आकृतिः 11.32

वयं जानीमः यत् वृत्तस्य परिधिः = πd

अर्धवृत्तस्य परिधिः = $\frac{1}{2} \pi d$

= $\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$ सेण्टीमीटरपरिमिता

= द्वाविंशतिः (22) सेण्टीमीटरपरिमिता

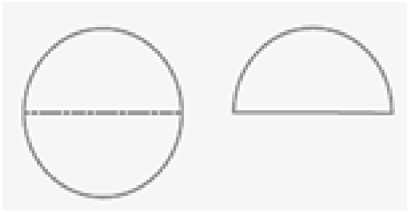
प्रत्येकम् अर्धवृत्तानां परिधिः द्वाविंशतिः (22) सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। अतः आकृतेः परिमापः = 4 × 22 से.मी. = अष्टाशीतिः (88) सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति।

उदाहरणम्16 सुधांशुः सप्त सेण्टीमीटरपरिमितां त्रिज्यामतीम् एकां वृत्ताकारचषकाधानीम् (disc) समानयोः द्वयोः भागयोः विभजति। प्रत्येकम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापः ज्ञायताम्।
(प्रयोगं कुर्वन्तु $\pi = \frac{22}{7}$)

समाधानम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापं ज्ञातुम् (disc) अस्माकं कृते आवश्यकम् अस्ति (11.33 आकृतिः)

(i) अर्धवृत्ताकारस्य आकारस्य परिधिः (ii) व्यासः

प्रदत्तत्रिज्या (r) = 7 से.मी.


आकृतिः 11.33

वयं जानीमः यत् वृत्तस्य परिधिः = $2\pi r$

अतः अर्धवृत्तस्य परिधिः = $\frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

= $\frac{22}{7}$ × 7 से.मी. = 22 से.मी.

अतः वृत्तस्य व्यासः = 2r = 2 × 7 से.मी.= 14 से.मी.

अतः प्रत्येकम् अर्धवृत्ताकारचषकाधान्योः परिमापः (disc) = 22 से.मी. + 14 से.मी.

= षट् (36) सेण्टीमीटरपरिमितः।

11.5.2 वृत्तस्य क्षेत्रफलम्

निम्नानि कथनानि विचारयन्तु -

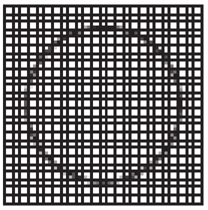
एकः कृषकः एकस्मिन् क्षेत्रे केदारे वा सप्तमीटरपरिमितां त्रिज्यामतीम् एकां राजिकां कर्षति। तस्य कृते पुरीषादिनः क्रयणम् आवश्यकम् अस्ति। यदि एकवर्गमीटरपरिमित-

क्षेत्रफलस्य कृते (1मी.^{2}) 1 किलोग्रामपरिमितं पुरीषादि आवश्यकं स्यात् तदा तेन कियत् किलोग्राम-परिमितम् पुरीषादि क्रेतव्यम् ?

दशरूप्यकैः प्रति एकवर्गमीटरपरिमितेन स्तरेण एकस्याः वृत्ताकारोत्पीठिकायाः प्रमार्जव्ययः कियान् भविष्यति यस्याः त्रिज्या मीटरद्वयात्मिका अस्ति ?

किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् एतासु परिस्थितिषु अस्माकं कृते किं ज्ञातुम् अपेक्षितं वर्तते, क्षेत्रफलम् अथवा परिमापः ? एतादृशीषु परिस्थितिषु अस्माभिः वृत्ताकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातव्यम्। आयान्तु, वयम् बिन्दुरेखापत्रेण एकस्य वृत्तस्य क्षेत्रफलं जानीमः।

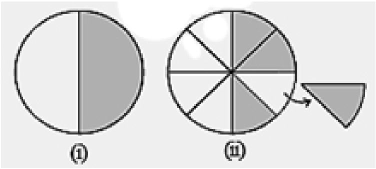
बिन्दुरेखापत्रे चतुःसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामन्तं वृत्तं निर्मान्तु (11.34 आकृतिः)। वृत्तेन आवृत-वर्गान् गणयित्वा अस्य वृत्तस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्।



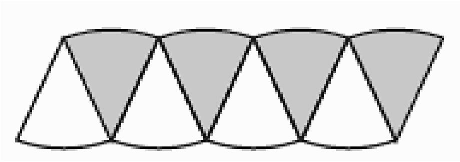
आकृतिः 11.34

यतोहि उपान्तभागाः ऋजवः सन्ति अतः वयम् अनेन विधिना वृत्त-क्षेत्रफलस्य एकं रूक्षानुमानम् (rough) एव प्राप्नुमः। केनचिद् अन्यविधना वृत्तस्य क्षेत्रफलं जानीमः। एकं वृत्तं रचयन्तु तस्य च अर्धभागं छायाङ्कितं कुर्वन्तु) [आकृतिः 11.35(i)]

अधुना वृत्तम् अष्टसु भागेषु वक्रीकुर्वन्तु प्रतिनिवर्तन्तु तान् च अष्टौ भागान् वक्रिततलानाम् अनुदिशं छिदन्तु (आकृतिः 11.35(ii))।



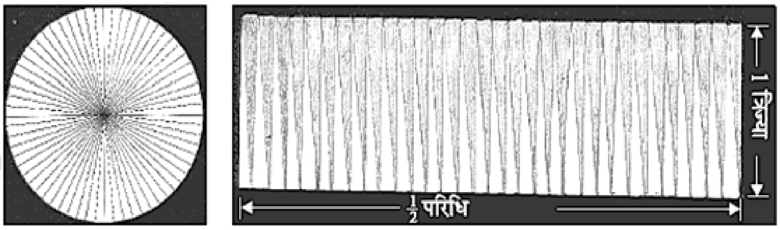
आकृतिः 11.35



आकृतिः 11.36

यथा 11.36 इति आकृतौ दर्शितं वर्तते तथा पृथग्खण्डान् व्यवस्थितं कुर्वन्तु यत् स्थूल-रूपेण (roughly) समान्तरचतुर्भुजं दर्शयति। यावन्तः त्रिज्याखण्डाः भविष्यन्ति तावत् उचितं समान्तरचतुर्भुजं प्राप्यते।

यथा उपरि आचरितं तथा वयं वृत्तं चतुष्षष्ट्यां त्रिज्याखण्डेषु विभक्तीकुर्मः तान् च व्यवस्थीकुर्मः तदा वयं प्रायशः एकम् आयतं प्राप्नुमः (आकृतिः 11.37)।



आकृतिः 11.37

अस्य आयतस्य विस्तृतिः का आस्ति ? अस्य आयतस्य विस्तृतिः एव वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति अर्थात् 'r' यथा निखिलं वृत्तं चतुषष्टि-त्रिज्याखण्डेषु (64) विभक्तं वर्तते तथा प्रतिदिशं द्वात्रिंशत् – त्रिज्याखण्डाः (32) सन्ति। आयतस्य दीर्घता द्वात्रिंशत्–त्रिज्याखण्डानां दीर्घतानां समाना वर्तते या वृत्तस्य परिधेः अर्धम् अस्ति। (आकृतिः 11.37)।

वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = निर्मितस्य आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b$

$$= (\text{परिधेः अर्धम्}) \times \text{त्रिज्या} = \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) = \pi r^2$$

अतः वृत्तस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2$

उदाहरणम् 17 त्रिंशत्सेण्टीमीटरपरिमितस्य (30) त्रिज्यामतः वृत्तस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

समाधानम् त्रिज्या r = 30 से.मी.

वृत्तस्य क्षेत्रफलं = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826$ से.मी.^{2}

उदाहरणम् 18 एकस्य वृत्ताकारस्य उद्यानस्य व्यासः 9.8 मीटरपरिमितः विद्यते। अस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्।

समाधानम् व्यासः = 9.8 मी. अतः त्रिज्या r = 9.8 ÷ 2 = 4.9 मी.

वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 4.9$ मी.^{2} =

$\frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9$ मी.^{2} = 75.46 मी.^{2}

एतान् कुर्वन्तु

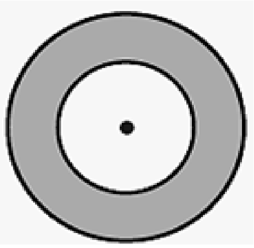
रेखाबिन्दुकर्गदे पृथक् त्रिज्यावन्ति वृत्तानि रचयन्तु। वर्गान् गणयित्वा क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। सूत्रं प्रयुज्य अपि क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। द्वयोः उत्तरयोः तुलनां कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 19 संलग्नाकृतिः द्वे वृत्ते दर्शयति ययोः केन्द्रं समानम् अस्ति। बृहद्वृत्तस्य त्रिज्या दश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति लघुवृत्तस्य त्रिज्या चतुःसेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति।

ज्ञायताम् (a) बृहद्वृत्तस्य क्षेत्रफलम् (b) लघुवृत्तस्य क्षेत्रफलम्

(c) द्वयोः वृत्तयोः अन्तर्वर्तिनः छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलम् (π = 3.14)

समाधानम्



(a) बृहद्वृत्तस्य त्रिज्या = 10 से.मी.

अतः बृहद्वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = πr^2

= $3.14 \times 10 \times 10 = 314$ से.मी.^{2}

(b) लघुवृत्तस्य त्रिज्या = 4 से.मी.

लघुवृत्तस्य क्षेत्रफलम् = πr^2

= $3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ से.मी.^{2}

(c) छायाङ्कित-भागस्य क्षेत्रफलम् = (314 – 50.24) से.मी.^{2} = 263.76 से.मी.^{2}

प्रश्नावली 11.3

1. निम्न-त्रिज्यावतां वृत्तानां परिधिः ज्ञायताम्। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

   (a) 14 से.मी. (b) 28 मि.मी. (c) 21 से.मी.

2. निम्नवृत्तानां क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। प्रदत्तम् अस्ति -

   (a) त्रिज्या = 14 मि.मी. ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु) (b) व्यासः = 49 मीटरपरिमितः

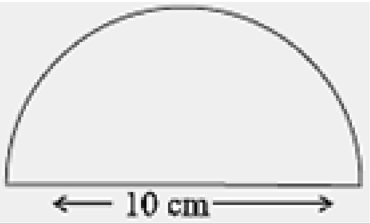
   (c) त्रिज्या = 5 से.मी.

3. यदि एकस्य वृत्ताकार-कागदस्य परिधिः 154 मीटरपरिमिता भवेत् तदा अस्य त्रिज्या ज्ञायताम्। वृत्ताकार-कागद्स्य क्षेत्रफलम् अपि जानन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

4. उद्यानपालकः एकविंशतिमीटरपरिमित-व्यासमत् वृत्ताकारोद्यानं परितः अजिरं नियोक्तुम् इच्छति।

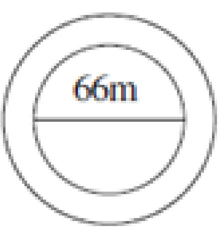
अपेक्षितस्य रज्ज्वोः दैर्घ्यं ज्ञायताम्, यदि सः द्व्यावृत्त्यात्मकम् अजिरं नियोक्तुम् इच्छति। रज्ज्वोः यदि प्रतिमीटर्-चतुरुप्यकम् अस्ति। ज्ञायताम्। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

5. यदि चतुर्सेण्टीमीटरपरिमितात् एकस्मात् वृत्ताकारकागदात् त्रिसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामत् वृत्तं (3) निष्कास्यते तदा कागदस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
6. साइमा 1.5 मीटरपरिमित-व्यासमत् एकं वृत्ताकारोत्पीठं परितः जालाभरणं योजयितुम् इच्छति। अपेक्षितस्य जालाभरणस्य अपेक्षितं दैर्घ्यं ज्ञायतां तथा च पञ्चदशरूप्यकैः प्रति मीटरपरिमितम् व्ययेन जालाभरण-व्ययः ज्ञायातम्। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
7. प्रदत्ताकृतिः सव्यासम् अर्धवृत्तम् अस्ति। तस्याः परिमापः ज्ञायताम्।

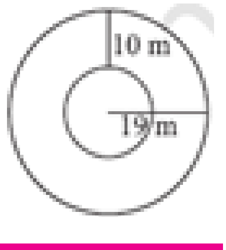


8. 1.6 मीटरव्यासमत्याः कस्याश्चिद् वृत्ताकारोत्पीठिकायाः पञ्चदशरूप्यकैः (15) प्रति वर्गमीटरपरिमितम् व्ययेन प्रमार्जनव्ययः ज्ञायताम्। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
9. शाझली चतुश्चतुत्वारिंशत् (44) सेण्टीमीटरपरिमिताम् एकां तन्त्रीं गृह्णाति तां च एकस्मिन् वृत्ताकारे वक्रीकरोति। तद्वृत्तस्य त्रिज्यां जानन्तु। अस्य क्षेत्रफलमपि ज्ञायताम्। यदि एतां तन्त्रीं पुनः एकस्मिन् वर्गे वक्रीकुर्मः तर्हि अस्य प्रत्येकं भुजस्य दैर्घ्यं कियत् भविष्यति ? कतमा आकृतिः अधिकं क्षेत्रं आवृणोति वर्गः अथवा वृत्तम् ? ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)
10. चतुर्दश (14) सेण्टीमीटरपरिमित-त्रिज्यायुतात् वृत्ताकार-स्थूल-कागदात् 3.5 सेण्टीमीटरपरिमिते त्रिज्यायुते द्वे वृत्ते तथा च त्रि (3) सेण्टीमीटरपरिमित-दीर्घः अथ च एकः (1) सेण्टीमीटरपरिमित-विस्तृतियुतः एकः आयतः निष्कास्यते (यथा आकृत्यां दर्शितम् अस्ति) स्थूल-कागदस्य अवशिष्टभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)

11. षट् सेण्टीमीटरपरिमित-भुजामतः एल्युमिनियमफलकस्य खण्डात् द्वि-सेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यायुतम् एकं वृत्तं निष्कास्यते। फलकस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
12. एकस्य वृत्तस्य परिधिः 31.4 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। वृत्तस्य त्रिज्यां क्षेत्रफलं च जानन्तु (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
13. एकां पुष्पराजिकां परितः चतुर्मीटरपरिमितः विस्तृतियुतः मार्गः अस्ति। पुष्पराजिकायाः व्यासः षड्षष्टिः मीटरपरिमितः अस्ति। अस्य मार्गस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् ? (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

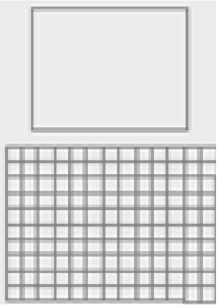


14. एकस्य वृत्ताकारस्य पुष्पोद्यानस्य क्षेत्रफलम् 314 मी.^{2} इति वर्तते। उद्यानकेन्द्रे भ्रम्यमाणा सेचनी (सेक्तृ) योज्यते या स्वां परितः द्वादश मीटरपरिमितं त्रिज्यायुतं क्षेत्रफलं सिञ्चति। किं सेचनी निखिले उद्याने अवसेकम् (सेचनम्) कर्तुं शक्नोति ? (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
15. आकृतौ अन्तः-बाह्यवृत्तयोः परिधिं जानन्तु। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)



16. 28 अष्टाविंशतिः मीटरपरिमितं त्रिज्यायुतं चक्रम् 352 मीटरपर्यन्तं दूरं गन्तुं कति वारं परिभ्राम्यते? ($\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु)
17. एकस्याः घट्याः निमेषसूचिकायाः दीर्घता पञ्चदश सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति। निमेषसूचिकाग्रम् एकस्यां होरायां कियत् दूरं याति ? (π= 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

11.6 एककानां रूपान्तरणम्



आकृतिः 11.38

वयं जानीमः यत् "1 से.मी.= 10 मि.मी." इति भवति। किं भवन्तः बोधयितुं शक्नुवन्ति यत् '1 से.मी.^{2}' इत्यत्र कति मी.मी.^{2} इति भवन्ति ? आगच्छन्तु वयम् एतादृशानां प्रश्नानाम् एव अन्वेषणं कुर्मः क्षेत्रफलानां च मापनं कुर्वन्तः एतेषाम् एककानि (घटकानि) कथं रूपान्तरितानि क्रियन्ते इति अवगच्छामः । बिन्दुरेखाकर्गदे एकसेण्टीमीटरपरिमित-भुजायुतम् एकं वर्गं रचयन्तु (आकृतिः 11.38)।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एकसेण्टीमीटरपरिमितः अयं वर्गः शतवर्गेषु विभक्तीकर्तुं शक्यते प्रत्येकं च वर्गस्य भुजः एकमीलिमीटरपरिमिता अस्ति।

एकसेण्टीमीटरपरिमितस्य भुजयुतस्य वर्गस्य क्षेत्रफलम् = (100) शतवर्गाणां क्षेत्रफलं, यस्य प्रत्येकं भुजा 1 मी.मी. अस्ति।

अतः 1 से.मी.^{2} = 100 × 1 मी.मी.^{2} अथवा 1 से.मी.^{2} = 100 मी.मी.^{2}

अनेन प्रकारेण 1 मी.^{2} = 1 मी. × 1 मी. = 100 से.मी. × 100 से.मी. (1मी. = 100 से.मी.)

किम् अधुना भवन्तः 'एकवर्गकिलोमीटर' इत्येतम् 'वर्गमीटर' इत्यसमिन् रूपे परिवर्तयितुं शक्नुवन्ति ?

'मिट्रिक' इति प्रणाल्यां भूखण्ड-क्षेत्रफलम् 'हेक्टेयर' इत्यनेन रूपेण माप्यते [यत् सङ्क्षेपेण 'ha' इति लिख्यते]

अनेन प्रकारेण 1 हेक्टेयर = 100 × 100 मी.^{2} = 10,000 मी.^{2}

यदा वयं क्षेत्रफलस्य एकम् एककम् एकस्मिन् लघुनि एकके परिवर्तयामः तदा परिणामस्वरूपेण एककानां सङ्ख्या अधिका भविष्यति।

उदाहरणार्थम् 1000 से.मी.^{2} = 1000 × 100 मी.मी.^{2} = 100000 मी.मी.^{2}

किन्तु यदा वयं क्षेत्रफलस्य एकं एककं एकस्मिन् गुरूणि एकके परिवर्तयामः तदा गुरूणाम् एककानां सङ्ख्या न्यूना भविष्यति।

उदाहरणार्थम् 1000 से.मी.^{2} = $\frac{1000}{10000}$ मी.^{2} = 0.1 मी.^{2}

एतान् कुर्वन्तु

निम्नानि परिवर्तयन्तु :

(i) 50 से.मी.^{2} इत्येतं मी.मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

(ii) 2 ha इत्येतं मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

(iii) 10 मी.^{2} इत्येतं से.मी.^{2} इत्यस्मिन् रूपे

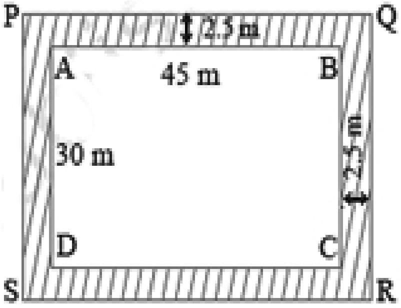
(iv) 1000 से.मी.^{2} इत्येतं मी.मी.^{2}

11.7 उपयोगः

भवद्भिः अवधानं दत्तं स्यात् यत् बहुधा वाटिकाः उद्यानानि च परितः तयोर्मध्ये वा चतुष्पथमिव किञ्चित् स्थानं मार्गरूपेण त्यज्यते। कस्मिंश्चित् काष्ठालवितं चित्रं परितः किञ्चत् स्थानं त्यज्यते।

यदा अस्माभिः एतादृशानां मार्गाणां सीमन्तानां (बार्डर) वा क्षेत्रफलानि ज्ञातव्यानि भवन्ति तदा वयं तेषां निर्माणव्ययं ज्ञातुम् इच्छामः।

उदाहरणम् 20 एकम् आयाताकारम् उद्यानं पञ्चचत्वारिंशत् मीटरपरिमितं दीर्घं त्रिंशत् च मीटरपरिमितं विस्तृतं अस्ति। उद्यानं परितः एकः 2.5 मीटरपरिमितः विस्तृतः मार्गः निर्मितः वर्तते। मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत।



समाधानम् मन्यन्ताम् ABCD इति आयाताकारम् उद्यानं तथा च 2.5 मीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं मार्गं छायाङ्कित-क्षेत्रं दर्शयति । मार्गः क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं (PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् - ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम्)

अस्माकं पार्श्वे अस्ति PQ = (45 + 2.5 + 2.5) मी. = 50 मी.

PS = (30 + 2.5 + 2.5) मी. = 35 मी.

ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b = 45 \times 30$ मी.^{2} = 1350 मी.^{2}

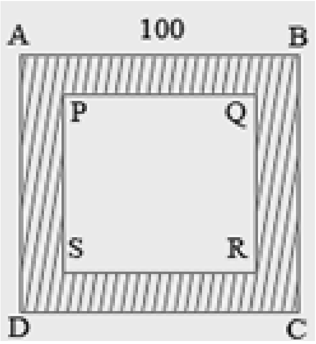
PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b = 50 \times 35$ मी.^{2} = 1750 मी.^{2}

मार्गस्य क्षेत्रफलम् = PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् - ABCD इति आयतस्य क्षेत्रफलम्

= (1750 −1350) मी.^{2} = 400 मी.^{2}

उदाहरणम् 21 100 मीटरपरिमितस्य भुजमतः एकस्य वर्गाकारोद्यानस्य सीमया सह अन्तर्वर्ती पञ्चमीटरपरिमितः विस्तृतिः मार्गः निर्मितः अस्ति। अस्य मार्गस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम्। पञ्चाशदधिकद्विशत-रूप्यकैः प्रतिदशवर्गमीटरमानेन मार्गे वज्रचूर्णनियोजनव्ययम् जानीत।

समाधानम् मन्यन्ताम् ABCD इति शतमीटरपरिमितं भुजामत् वर्गाकारोद्यानम् अस्ति। छायाङ्कितभागः पञ्चमीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं मार्गं दर्शयति



PQ = 100 – (5 + 5) = 90 मी.

ABCD इति वर्गस्य क्षेत्रफलम् = (भुजा)^2 = $(100)^2$ मी.^{2} = 10,000 मी.^{2}

PQRS इति वर्गस्य क्षेत्रफलम् = (भुजा)^2 = $(90)^2$ मी.^{2} = 8100 मी.^{2}

अतः मार्गस्य क्षेत्रफलम् = (10000 – 8100) मी.^{2} = 1900 मी.^{2}

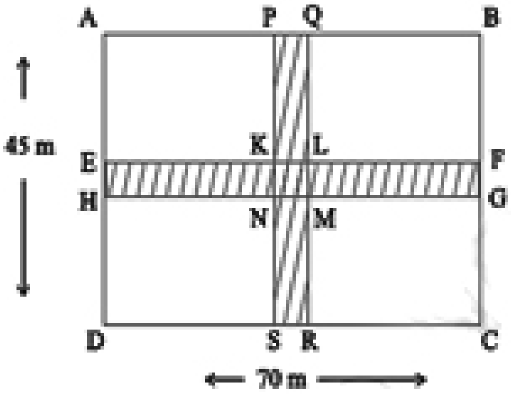
10 मी^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः = 250 रू.

अतः 1मी.^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः $= \dfrac{250}{10}$ रू.

अतः 1900 मी.^{2} इत्यमिन् भागे वज्रचूर्णलेपनस्य व्ययः $= \dfrac{250}{10} \times 1900 = 47500$ रूप्यकाणि

उदाहरणम् 22 सप्ततिः मीटरपरिमित-दीर्घस्य पञ्चचत्वारिंशत्परिमितस्य च विस्तृतिमतः कस्यचित् आयताकारोद्यानात् मध्यतः द्वौ परस्पर-लम्बौ मार्गौ गच्छतः यौ आयतस्य भुजानां समान्तरौ स्तः। मार्गयोः क्षेत्रफलं जानीत तथा च पञ्चाधिकैकशतरूप्यकैः प्रतिवर्गमीटरमानेन मार्गयोः निर्माणव्ययम् अपि जानीत।

समाधानम् मार्गयोः क्षेत्रफलं छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलम् एव अस्ति अर्थात् PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलं तथा च EFGH इति आयतस्य क्षेत्रफलम्। परञ्च एवं कृते सति KLMN इति वर्गस्य क्षेत्रफलं वारद्वयं गृह्यते यस्य व्यवकलनम् अपेक्षितं वर्तते। अधुना



PQ = 5 मी. एवञ्च PS = 45 मी.

EH = 5 मी. एवञ्च EF = 70 मी.

KL = 5 मी. एवञ्च KN = 5 मी.

मार्गयोः क्षेत्रफलम्

= PQRS इति आयतस्य क्षेत्रफलम् + EFGH इति आयतस्य क्षेत्रफलम् – KLMN इति आयतस्य क्षेत्रफलम्

= PS × PQ + EF × EH – KL × KN

= (45 × 5 + 70 × 5 −5 × 5) मी.^{2}

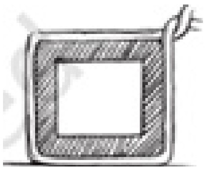
= (225 + 350 −25) मी.^{2} = 550 मी.^{2}

मार्गाणां निर्माणव्ययः = 105 × 550 = 5775 रूप्यकाणि

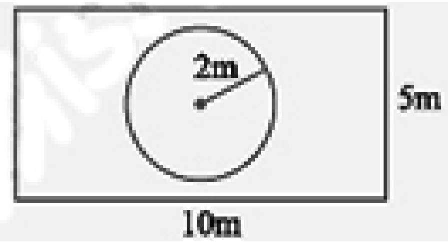
प्रश्नावली 11.4

1. किञ्चित् उद्यानं नवतिः मीटरपरिमतं दीर्घं तथा च पञ्चसप्ततिः मीटरपरिमितं विस्तृतम् अस्ति। एतं परितः एकः पञ्चमीटरपरिमितः विस्तृतः मार्गः निर्मातव्यः। मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत। उद्यानस्य क्षेत्रफलमपि हेक्टेयरमानेन जानन्तु।
2. पञ्चविंशत्युत्तरैकशतं मीटरपरिमितं दीर्घं तथा च पञ्चषष्टिः मीटरपरिमितं विस्तृतियुतं कञ्चित् आयताकारोद्यानं परितः बहिः एकः मीटरत्रयपरिमित-विस्तृतः मार्गः अस्ति। मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत।
3. अष्टसेण्टीमीटरपरिमिते दीर्घतायुते पञ्च सेण्टीमीटरपरिमिते च विस्तृतियुते एकस्मिन् स्थूल-कागदे एकं चित्रं तथा निर्मितं वर्तते यत् अस्य एकैकानां भुजानाम् अनुदिशम् 1.5 सेण्टीमीटरपरिमितः विस्तृतियुतः उपान्तः (margin) त्यक्तः अस्ति। उपान्तस्य क्षेत्रफलं जानीत।
4. 5.5 इति मीटरपरिमितं दीर्घं तथा च चतुर्मीटरपरिमितं विस्तृतिमन्तं प्रकोष्ठं परितः बहिः 2.25 इति मीटरपरिमितं विस्तृतिमत् प्राङ्गणम् अस्ति। ज्ञायताम् :
   (i) प्राङ्गणस्य क्षेत्रफलं
   (ii) द्विशतरूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन प्राङ्गणस्य कुट्टिमे वज्रचूर्णालेपनस्य व्ययः।
5. त्रिंशत्मीटरपरिमतं भुजामतः वर्गाकारोद्यानस्य सीमायाः अन्तःबद्धः एकमीटरपरिमितः विस्तृत-मार्गः अस्ति। ज्ञायताम् -
   (i) मार्गस्य क्षेत्रफलम्।
   (ii) चत्वारिंशत् रूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन शेषभागे तृणवपनस्य (घासवपनस्य) व्ययः।
6. सप्तशतमीटरपरिमितस्य दीर्घस्य तथा च त्रिशतमीटतपरिमितस्य विस्तृतियुतस्य आयाताकारोद्यानस्य मध्यतः (मध्यं) भूत्वा दश मीटरपरिमितौ विस्तृतियुतौ द्वौ पथौ स्तः यौ परस्परं लम्बौ (समकोणेन विभक्तौ) च स्तः। एतयोः प्रत्येकं मार्गस्य क्षेत्रफलं जानीत अथ च उद्यानस्य भुजं विहाय उद्यानस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलम् अपि जानन्तु। उत्तरं हेक्टेयरमानेन यच्छन्तु।
7. नवतिः मीटरपरिमिते दीर्घे तथा च षष्टिः मीटरपरिमिते विस्तृते आयताकार-क्षेत्रे द्वौ मार्गौ निर्मितौ स्तः। यौ भुजानां समान्तरौ, अन्योऽन्यं लम्बवत् छिन्दन्तः तथा च क्षेत्रस्य मध्यं भूत्वा निर्गच्छतः। यदि प्रत्येकं पथस्य विस्तृतिः त्रिमीटरपरिमिता स्यात् तदा ज्ञायताम् :
   (i) पथैः आच्छादितं क्षेत्रफलम्।
   (ii) दशाधिकैकशतरूप्यकैः प्रति वर्गमीटरमानेन पथनिर्माण-व्ययः।

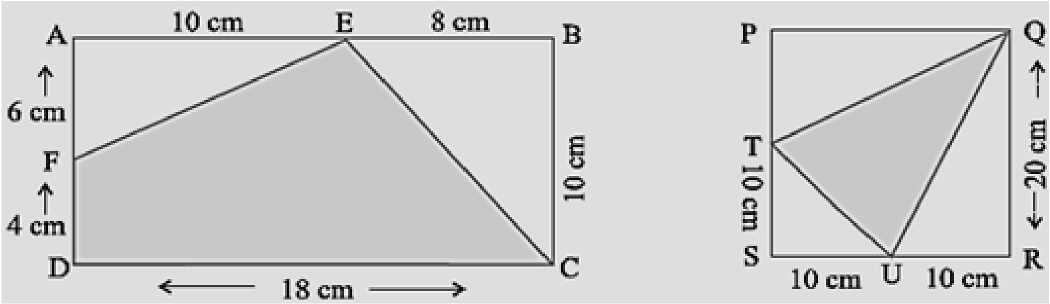
8. प्रज्ञा चतुःसेण्टीमीटरपरिमितं त्रिज्यामत् वृत्ताकारनलिकां परितः एकां रज्जुं सम्वेष्टयति (यथा दर्शितं वर्तते) तथा च रज्ज्वोः आवश्यकं दैर्घ्यं छिनत्ति। तत्पश्चात् सा तां चतुर्मीटरपरिमितम् कञ्चन वर्गाकार-सम्पुटं परितः संवेष्टयति (दर्शितं वर्तते) किं तस्याः पार्श्वे इतोऽपि रज्जुः अवशिष्टा भविष्यति? ($\pi = 3.14$)

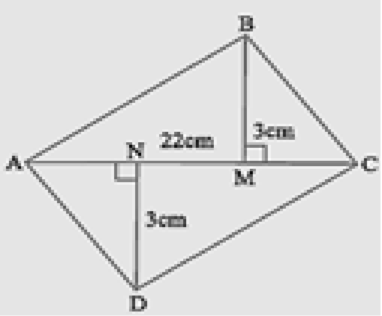


9. संलग्नाकृतिः कस्यचित् आयाताकारोद्यानस्य मध्ये एकां वृत्ताकारराजिकां दर्शयति। जानन्तु -
   (i) समग्रस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलम्।
   (ii) पुष्पराजिकायाः क्षेत्रफलम्।
   (iii) पुष्पराजिकां विहाय उद्यानस्य शेषभागस्य क्षेत्रफलम्।
   (iv) पुष्पराजिकायाः परिधिः।



10 दत्ताकृतौ छायाङ्कितभागस्य क्षेत्रफलं ज्ञायताम् -





11 ABCD इति चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानीत । यत्र AC = 22 से.मी., BM = 3 से.मी., DN = 3 से.मी. तथा च BM ⊥ AC, DN ⊥ AC इति ।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. परिमापः काञ्चित् पिहताकृतिं परितः दैर्घ्यम् अस्ति यद्यपि क्षेत्रफलं कयाचित् पिहिताकृतिना आवेष्टितं तलभागं क्षेत्रं वा दर्शयति ।
2. वयं गतकक्ष्यायां ज्ञातवन्तः यत् कस्यचित् वर्गस्य एवञ्च आयतस्य परिमापः अथवा क्षेत्रफलं कथं निष्कास्यते -

   (a) कस्यचिद् वर्गस्य परिमापः = 4 × भुजः

   (b) कस्यचिद् आयतस्य परिमापः = 2 × (दीर्घता + विस्तृतिः)

   (c) कस्यचिद् वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजः × भुजः

   (d) कस्यचिद् आयतस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता × विस्तृतिः
3. कस्यचित् समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = आधारः × औन्नत्यम्
4. कस्यचित् त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ (अस्मात् सम्प्राप्तं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्)

   = $\frac{1}{2}$ × आधारः × औन्नत्यम्
5. एकं वृत्ताकारं क्षेत्रं परितः दूरत्वम् अस्य परिधिः इति कथ्यते । कस्यचित् वृत्तस्य परिधिः = πd इति भवति यत्र d इति वृत्तस्य व्यासः तथा च $\pi = \frac{22}{7}$ इति अथवा (प्रायेण) 3.14 एतावद् भवति ।

6 कस्यचित् वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = πr^2 यत्र r इति वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति ।

7. यथा भवन्तः जानन्ति यत् येन प्रकारेण वयं दैर्घ्याणि एककेषु रूपान्तरितं कुर्मः तेन एव प्रकारेण क्षेत्रफलानाम् एककानां रूपान्तरणं कर्तुं शक्यते ।

   1 से.मी.^{2} = 100 मि.मी.^{2}, 1 मी.^{2} = 10000 से.मी.^{2}, 1 हेक्टेयर= 10000 मी.^{2}